

# مکانیک سیالات پیشرفته

دانشگاه صنعتی شاهرود  
دانشکده مهندسی مکانیک



مقدمه

عملگرها، سیالات نیوتنی و ویسکوزیته

کلاس درس دکتر نوروزی

اسفند ۹۹

# بنام خداوند جان و خرد

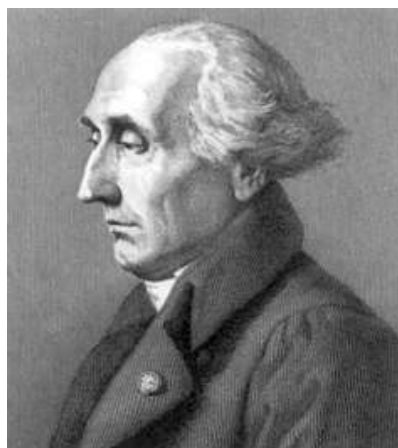
## درس مکانیک سیالات پیشرفته

مراجع:

[1] F.M. White, Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill, 3rd Edition, 2011.

[2] I.G. Currie, Fundamental Mechanics of Fluids, CRC Press, 4th Edition, 2013.

ارزیابی (از ۲۰):	مباحث درس:
حل تمرین: ۳ نمره	مفاهیم پایه در مکانیک سیالات
حضور پیوسته و پرسشهای کلاسی: ۲ نمره	معادلات بقا در مکانیک سیالات
پروژه درسی: ۴ نمره	آنالیز تحلیلی میدان جریان (حل جریانهای پایه)
امتحانات کتبی: ۶ نمره	آنالیز پایداری در جریان سیالات
امتحانات شفاهی: ۵ نمره	جریانهای پتانسیل دو بعدی و سه بعدی



Joseph Luis Lagrange  
(1736–1813)

### دیدگاه لاگرانژی:

دیدگاه لاگرانژی، رویکردی در مکانیک است که معطوف به اجسام مادی جهت تحلیل دینامیک حرکت آنها است. در این رویکرد با استفاده از یک یا چند دستگاه مختصات، تعقیب اجسام (ذرات) مادی در گذر زمان انجام می شود و به این ترتیب امکان تعیین موقعیت (مسیر) و در نهایت سایر پارامترهای مربوط به حرکت ذرات نظیر، سرعت، شتاب و ... وجود خواهد داشت. دیدگاه لاگرانژی بیشتر در مکانیک جامدات متداول است.



Leonhard Euler  
(1707–1783)

### دیدگاه اویلری:

دیدگاه اویلری رویکرد دیگری در مکانیک است که معطوف به فضا جهت تحلیل دینامیک حرکت ذرات موجود در موقعیت های مختلف مکانی است. بنابراین در دیدگاه اویلری کلیه کمیت ها نظیر سرعت، فشار، دما و ... میدانی محسوب می شوند (یعنی علاوه بر زمان تابع مکان هم هستند). به بیان ساده تر، در دیدگاه اویلری، در هر نقطه موردنظر در میدان جریان می توان مشخصات جریان مانند سرعت، شتاب و ... را در زمانهای مختلف بدست آورد و به ذرات عبوری و این که از کجا آمده اند و به کجا می روند، توجهی نمی شود. به دلیل آنکه در مکانیک سیالات با تعداد فوق العاده زیادی از ذرات روبرو هستیم، استفاده از دیدگاه اویلری در مکانیک سیالات بسیار به صرفه تر و متداول است.

## عملگرها در مکانیک سیالات

همانطور که گفته شد کمیت‌های فیزیکی در دیدگاه اویلری میدانی هستند، یعنی علاوه بر زمان تابع مکان هم هستند، مثلاً برای کمیت‌های اسکالری مثل فشار، چگالی، دما و ... داریم:

$$p = p(x, y, z, t), \quad \rho = \rho(x, y, z, t), \quad T = T(x, y, z, t) \quad \& \dots$$

به طور مشابه برای کمیت‌های برداری داریم:

$$\mathbf{V}(x, y, z, t) = u(x, y, z, t)\mathbf{i} + v(x, y, z, t)\mathbf{j} + w(x, y, z, t)\mathbf{k}$$

نکته: در اینجا بردارها و تانسورها بصورت بولد نمایش داده شده اند.

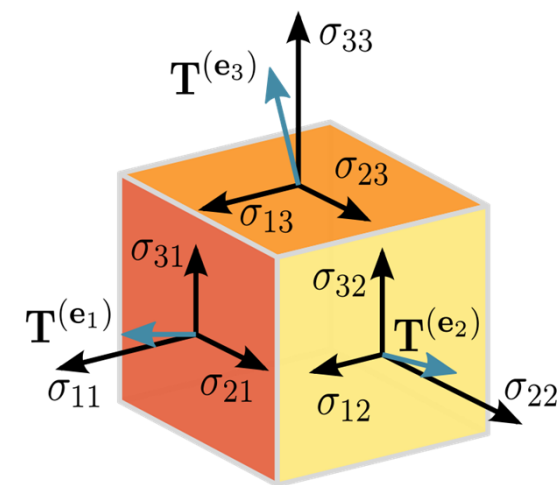
**مفهوم تانسور:** تانسور مفهومی ریاضی است که برای بیان کمیت‌های فیزیکی و مولفه‌هایشان مورد استفاده قرار می‌گیرد. مرتبه یک تانسور (rank) معرف ابعاد ریاضی و یا به عبارتی تعداد مولفه‌های آن است:

$$3^{\text{rank}} = \text{تعداد مولفه‌های تانسور در فضای سه بعدی}$$

**تانسور مرتبه صفر:** کمیت‌های اسکالر نظیر فشار، دما، چگالی و ... که با یک عدد (مولفه) بیان می‌شوند، تانسور مرتبه صفر هستند.

**تانسور مرتبه یک:** کمیت‌های برداری نظیر سرعت، شتاب و ... که با سه مولفه بیان می‌شوند تانسور مرتبه یک محسوب می‌شوند.

**تانسور مرتبه دوم:** کمیت‌هایی نظیر تنش، کرنش و نظایر آن که با ۹ مولفه بیان می‌شوند، تانسور مرتبه دوم نامیده می‌شود. بصورت یک غلط مصطلح، واژه تانسور عمدتاً به تانسورهای مرتبه دوم اطلاق می‌شود.



$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

## عملگرهای تانسوری متداول

۱- عملگر گرادیان ( $\nabla$ ): گرادیان یک عملگر مشتق گیر نسبت به جهات مکانی است. این عملگر بصورت مستقل مقدار مشتقات تابع را نسبت به هر جهت محاسبه کرده و حاصل آنرا بصورت مولفه های جداگانه گزارش می کند. عملگر گرادیان، مرتبه عبارت حاصله را یک واحد افزایش می دهد. بنابراین گرادیان کمیت های اسکالر مانند فشار، دما و ... یک بردار خواهد بود:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \quad \& \quad \nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1)$$

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2)$$



از آنجا که گرادیان مرتبه عبارت حاصل را یک واحد زیاد می کند، بنابراین انتظار می رود که گرادیان یک بردار، یک تانسور مرتبه دوم باشد. برای نمونه، گرادیان سرعت از رابطه مقابل محاسبه می شود:

## ۲- عملگر دیورژانس

عملگر دیورژانس ضرب داخلی عملگر  $\nabla$  است و با اعمال آن، مرتبه یک واحد کاهش پیدا می کند. با این توصیف حاصل دیورژانس یک کمیت برداری نظیر سرعت یک کمیت اسکالر است:

$$\left. \begin{aligned} \nabla( ) &= \frac{\partial( )}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial( )}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial( )}{\partial z} \mathbf{k} \\ \mathbf{V} &= u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \end{aligned} \right\} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3)$$

از لحاظ فیزیکی دیورژانس یک بردار، میزان «شار خروجی» یا «جذب از محیط» یک میدان برداری را در یک نقطه بوسیله یک عبارت اسکالر علامت دار اندازه گیری می کند. همچنین دیورژانس یک تانسور مرتبه دوم نظیر تنش، یک بردار خواهد بود:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \mathbf{k} \quad (4)$$

### ۳- عملگر لاپلاسین

عملگر لاپلاسین ( $\nabla^2$ )، مهمترین عملگر بیضوی در مبحث مشتقات جزئی است و لاپلاسین یک کمیت فیزیکی بصورت دیورژانس گرادیان آن کمیت تعریف می شود. مثلاً برای گرادیان دما داریم:

$$\nabla^2 T = \nabla \cdot \nabla T \quad (5)$$

بنابراین با اعمال متوالی دو عملگر گرادیان و دیورژانس، مرتبه عبارت حاصله تغییر نمی کند، اما چون هر دو عملگر گرادیان و دیورژانس مشتق گیر هستند، حاصل به شکل جمع مشتقات مرتبه دوم در می آید:

$$\left. \begin{aligned} \nabla ( ) &= \frac{\partial ( )}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial ( )}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial ( )}{\partial z} \mathbf{k} \\ \nabla T &= \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \rightarrow \nabla^2 T = \nabla \cdot \nabla T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (6)$$

این عملگر معرف پخش (نفوذ) کمیت‌های فیزیکی در یک محیط مادی است (نظیر پخش دما در هدایت حرارتی). برای کمیت‌های برداری مثل سرعت نیز حاصل گرادیان به شکل مشابهی تعریف می شود:

$$\nabla^2 \mathbf{V} = \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^2} = \nabla^2 u \mathbf{i} + \nabla^2 v \mathbf{j} + \nabla^2 w \mathbf{k} \quad (7)$$

## ۴- عملگر کرل

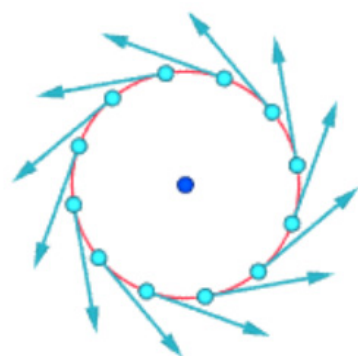
عملگر کرل، ضرب خارجی بردار گرادیان است و برای یک کمیت نظیر سرعت مقدار آن برابر خواهد بود:

$$\boldsymbol{\omega} = \text{Curl } \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \quad (۸)$$

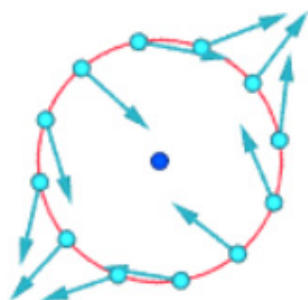
کرل بردار سرعت به Vorticity معروف است و با محاسبه دترمینان فوق، داریم:

$$\boldsymbol{\omega} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (۹)$$

عملگر کرل، برای توصیف چرخش میدانهای برداری مورد استفاده قرار می گیرد.



Vorticity  $\neq 0$



Vorticity = 0



## ۵- عملگر مشتق مادی

همانطور که پیشتر گفته شد در دیدگاه اوپلری، کلیه کمیت‌های میدانی هستند (یعنی بجز زمان تابع مکان نیز هستند). لذا دیفرانسیل کامل یک کمیت دلخواه میدانی مانند  $Q=Q(t,x,y,z)$  برابر است با:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial t} dt + \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \quad (10)$$

با تقسیم کردن طرفین به  $dt$  داریم:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial Q}{\partial z} \quad (11)$$

دیفرانسیل کامل یک کمیت میدانی نسبت به مکان به مشتق مادی معروف است و معمولاً برای آن از نماد  $\frac{D}{Dt}$  استفاده می‌شود.

همچنین باید توجه داشت عبارات  $dx/dt$ ،  $dy/dt$  و  $dw/dt$  مولفه‌های سرعت  $u$ ،  $v$  و  $w$  هستند. لذا برای رابطه فوق داریم:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} + v \frac{\partial Q}{\partial y} + w \frac{\partial Q}{\partial z} \quad (12)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که مشتق مادی بر حسب عملگر گرادیان، به شکل زیر قابل بیان است:

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla Q \quad (13)$$

## مفهوم شتاب مادی

مشتق مادی میدان سرعت به شتاب مادی معروف است. لذا از روابط (۱۲) و (۱۳) برای شتاب مادی داریم:

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \quad (14)$$

بایستی توجه داشت که شتاب مادی یک بردار است. برای مولفه های می توان نوشت:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \frac{Du}{Dt} \mathbf{i} + \frac{Dv}{Dt} \mathbf{j} + \frac{Dw}{Dt} \mathbf{k} \quad (15)$$

از روابط (۱۲) و (۱۳) برای مولفه های مشتق مادی (رابطه (۱۵)) داریم:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ a_y &= \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla v = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ a_z &= \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla w = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (16)$$

## یادآوری بسط تیلور

برای توابع پیوسته و مشتق پذیر سری توانی بصورت زیر وجود دارد:

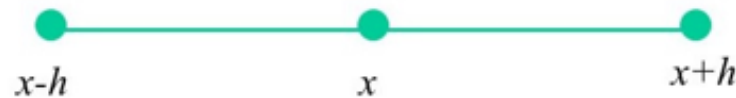
$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{[n]}(x) h^n \quad (۱۷)$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x)h^2 + \frac{1}{3!} f'''(x)h^3 + \dots$$

در رابطه فوق،  $f^{[n]}$  معرف مشتق  $n$  ام تابع  $f$  است.



Brook Taylor (1685-1731)



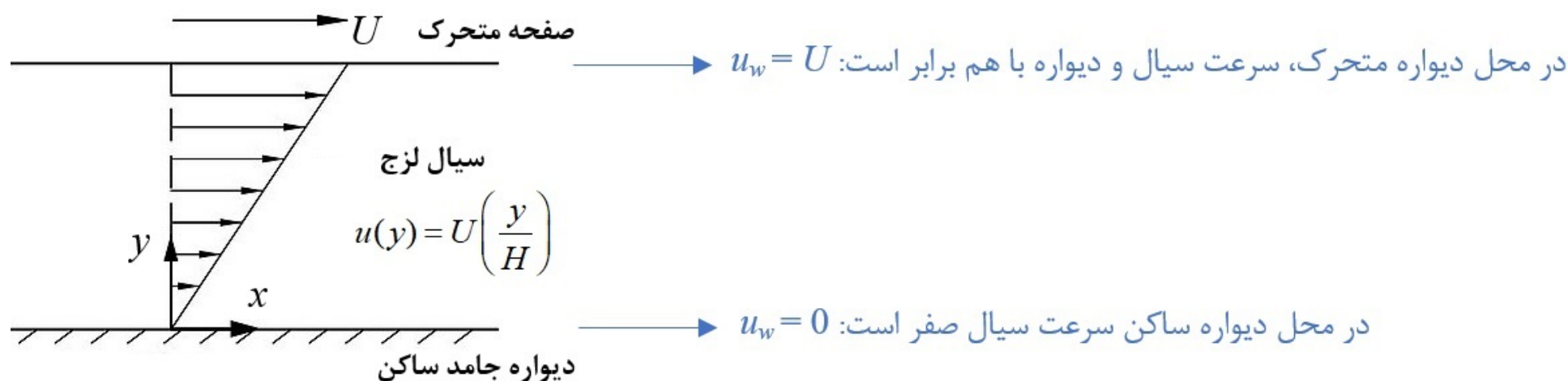
نکته: چنانچه مقدار  $h$  کوچک باشد:

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h \quad (۱۸)$$

## شرط عدم لغزش

مشاهدات تجربی نشان می دهد که در عمده جریانها، سیال به مرزهای جامد می چسبد. به این ترتیب می توان گفت که سرعت نسبی سیال و دیواره جامد در محل دیوار صفر است. به عبارت دیگر اگر دیواره جامد ساکن باشد، سرعت سیال در محل دیوار صفر است و اگر دیواره جامد متحرک با سرعت  $U$  باشد در اینصورت سرعت سیال در محل دیوار نیز برابر  $U$  است.

نکته: در موارد بسیار خاصی مانند جریان در مقیاسهای میکرو و نانو، جریان برخی سیالات غیرنیوتنی (مثل مذابهای پلیمری) و جریانهای فراصوتی در لبه لایه مرزی، امکان لغزش سیال در محل دیوار (نقض شرط عدم لغزش) وجود دارد.

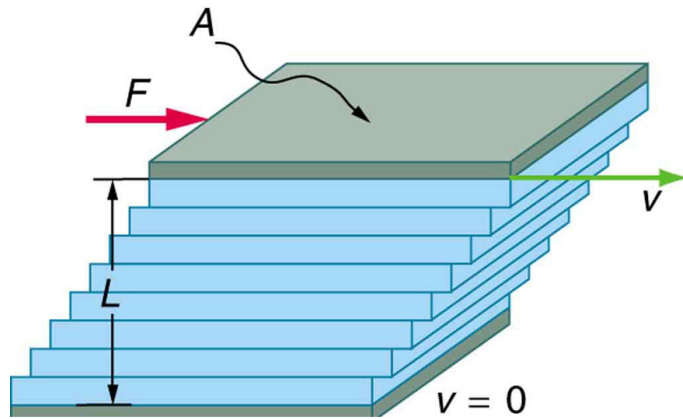


جریان برشی ساده (جریان کوئت) بین دو صفحه موازی با فاصله  $H$

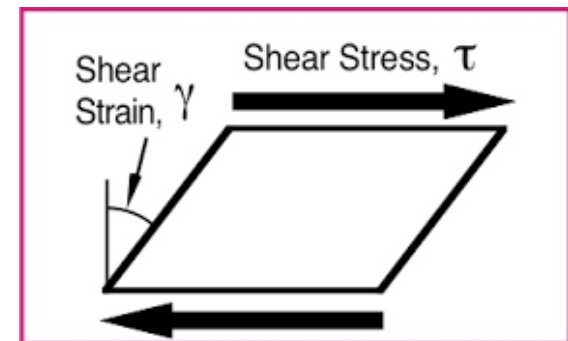
## مفهوم نرخ برش

به زاویه تغییر شکل ماده تحت تنش برشی، کرنش برشی (shear strain) گفته می شود (زاویه  $\gamma$  در شکل زیر). نرخ برش ( $\dot{\gamma}$ ) عبارت است از مشتق زمانی کرنش برش که در جریانهای دو بعدی ساده که با پروفیل یک متغیره برای یک مولفه سرعت بیان می شوند (مانند جریان برشی ساده که  $u$  فقط تابع  $y$  است)، به شکل زیر تعریف می شود:

$$\text{For Simple Profiles } (u=u(y)): \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{d\gamma_{xy}}{dt} = \frac{du}{dy} \quad (19)$$



لغزش لایه های جریان بر روی یکدیگر در جریان برشی ساده



## نرخ برش در جریانهای دوبعدی

در حالت کلی دو بعدی، نرخ برش بصورت مجموع نرخ زوایای تغییر شکلهای برشی ناشی از هر دو مولفه سرعت  $u$  و  $v$  تعریف می شود:

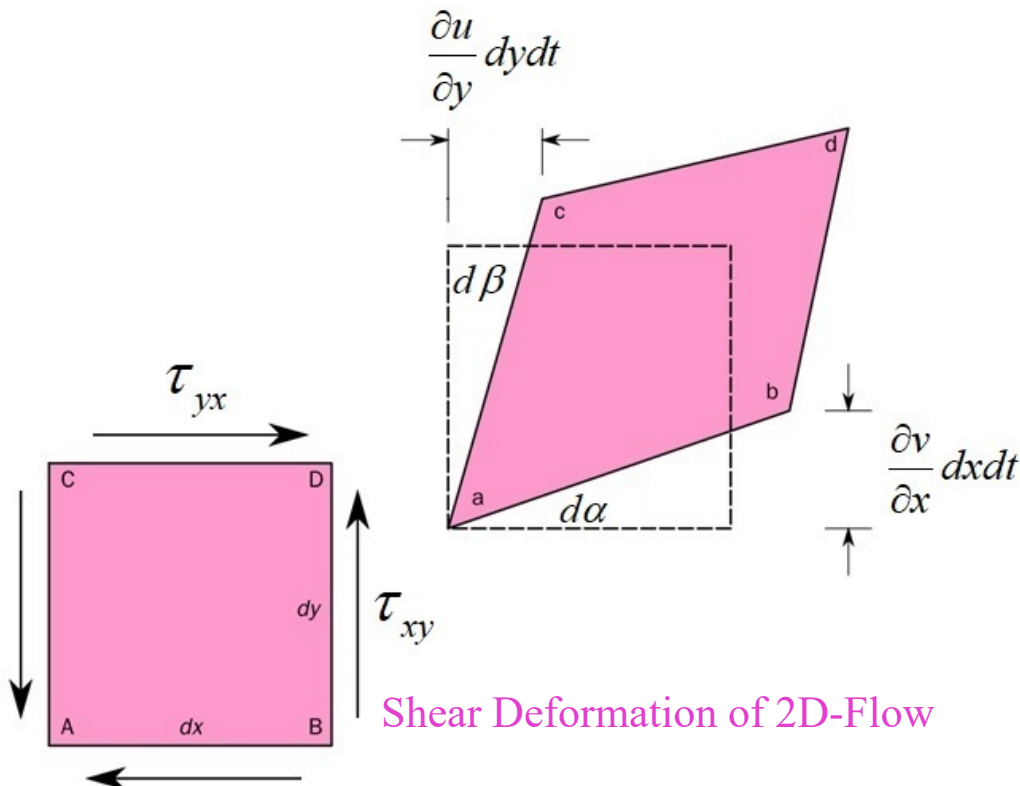
$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}$$

$$d\alpha = \lim_{dt \rightarrow 0} \left[ \tan^{-1} \frac{(\partial v / \partial x) dx dt}{dx + (\partial u / \partial x) dx dt} \right] = \frac{\partial v}{\partial x} dt$$

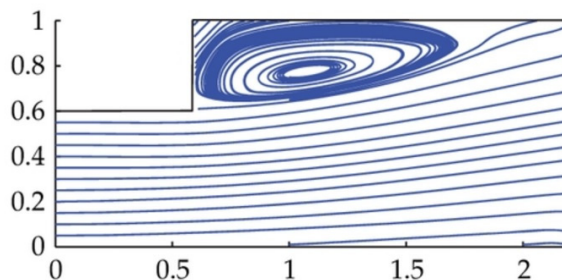
$$d\beta = \lim_{dt \rightarrow 0} \left[ \tan^{-1} \frac{(\partial u / \partial y) dy dt}{dy + (\partial v / \partial y) dy dt} \right] = \frac{\partial u}{\partial y} dt$$

در نهایت از روابط فوق نتیجه می شود:

For 2D Flows: 
$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (20)$$



Example of 2D Flow: Step Flow



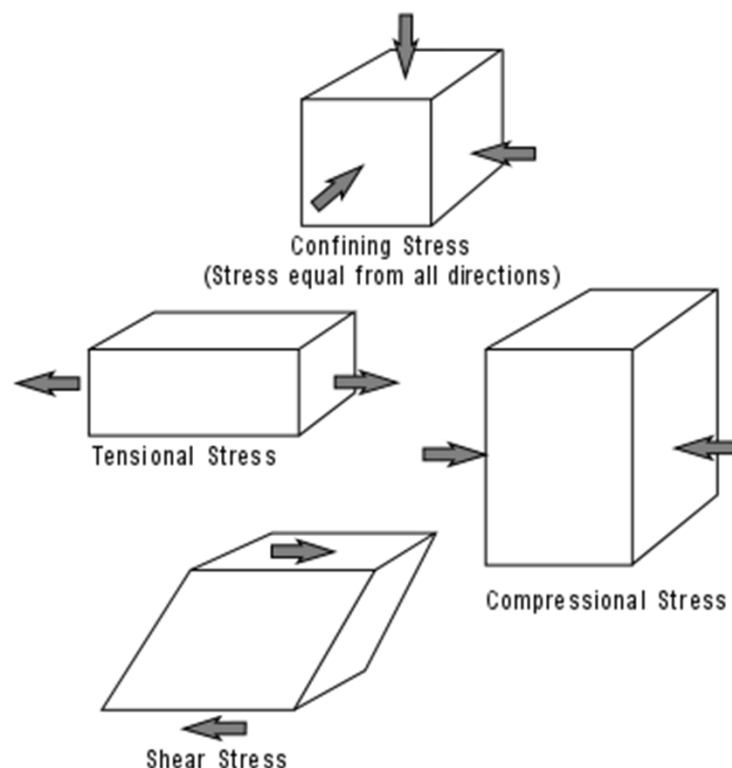
## تانسور نرخ برش

در حالت کلی سه بعدی، المان مادی مکعبی شکل علاوه بر صفحه  $XY$  می تواند در صفحات  $XZ$  و  $YZ$  هم تغییر شکل برشی داشته باشد. همچنین این المان مکعبی می تواند تغییر شکل های کششی-فشاری روی وجوه خود داشته باشد. بنابراین نرخ برش دارای مولفه های تغییر شکلی متعددی بوده و بصورت یک تانسور مرتبه دوم متقارن به شکل زیر قابل تعریف است:

$$\dot{\gamma} = \nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T \quad (21)$$

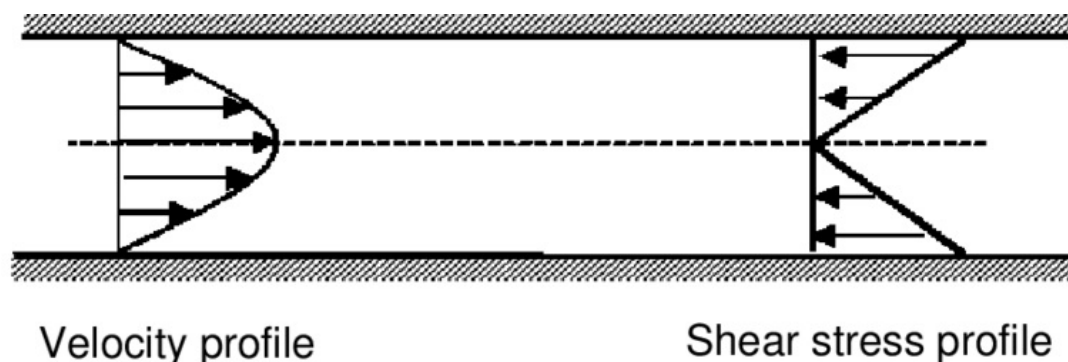
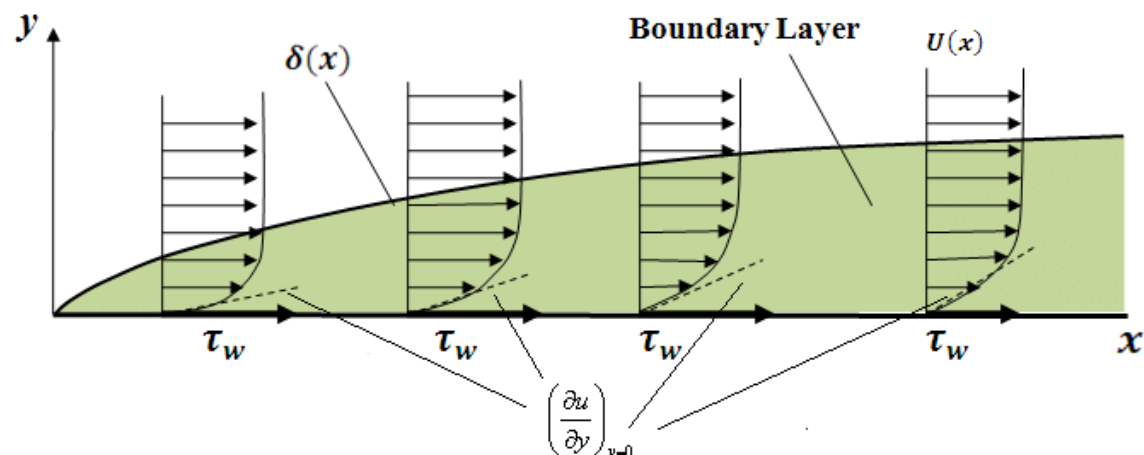
در رابطه فوق،  $T$  علامت ترانهاده است. با قراردادن رابطه (۲) در رابطه (۲۱) داریم:

$$\dot{\gamma} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (22)$$

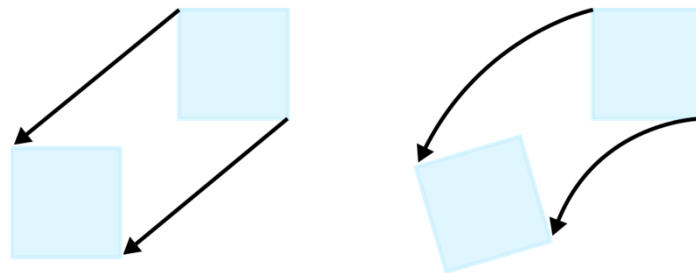


## نکاتی در خصوص نرخ برش:

- واحد نرخ برش  $S^{-1}$  است.
- در پروفیل‌های سرعت، شیب خط مماس نسبت به راستای قائم معرف مقدار نرخ برش است.
- معمولاً حداکثر اندازه نرخ برش (و در نتیجه تنش برشی) روی مرزهای جامد ایجاد می‌شود.
- حداقل اندازه نرخ برش مربوط به نقاط اکسترمم سرعت و یا بخش‌های یکنواخت پروفیل سرعت (مثل خارج لایه مرزی) است.
- در جریان سیالات، چسبندگی بین لایه‌های جریان در اثر ویسکوزیته آنها وجود دارد. به این ترتیب با ازدیاد نرخ برش، میزان تنش برشی جریان افزایش می‌یابد.







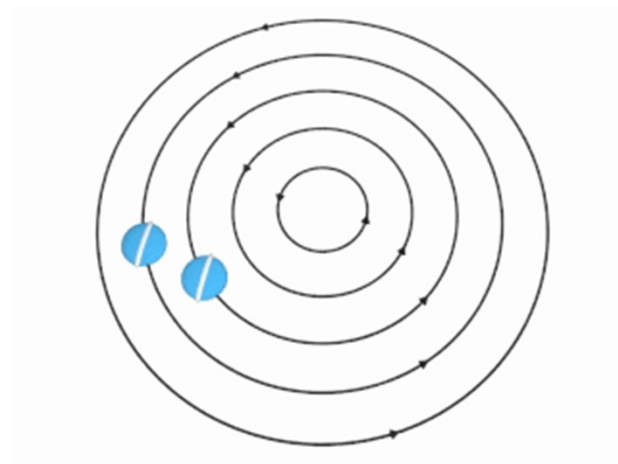
Irrotational and rotational motion



Vortex created by the passage of an aircraft wing

## چرخش در جریان سیالات

چنانچه در جریان یک سیال، قطر المانهای مادی بچرخد، جریان چرخشی (Rotational Flow) نامیده می شود و چنانچه زاویه قطر المانهای مادی با گذر زمان تغییر نکند، جریان غیرچرخشی (Irrotational Flow) است.



A rigid-body vortex

## محاسبه چرخش در جریان سیالات

در شکل مقابل، یک المان مادی مربعی در دو لحظه  $t$  و  $t+dt$  نشان داده شده است. در لحظه  $t$  زاویه قطر المان مادی  $45^\circ$  درجه است و در اثر وجود یک جریان دو بعدی زاویه قطر المان مادی در لحظه  $t+dt$  برابر  $\Phi + d\alpha$  است. بنابراین مقدار زاویه چرخش بین دو لحظه مذکور برابر است با:

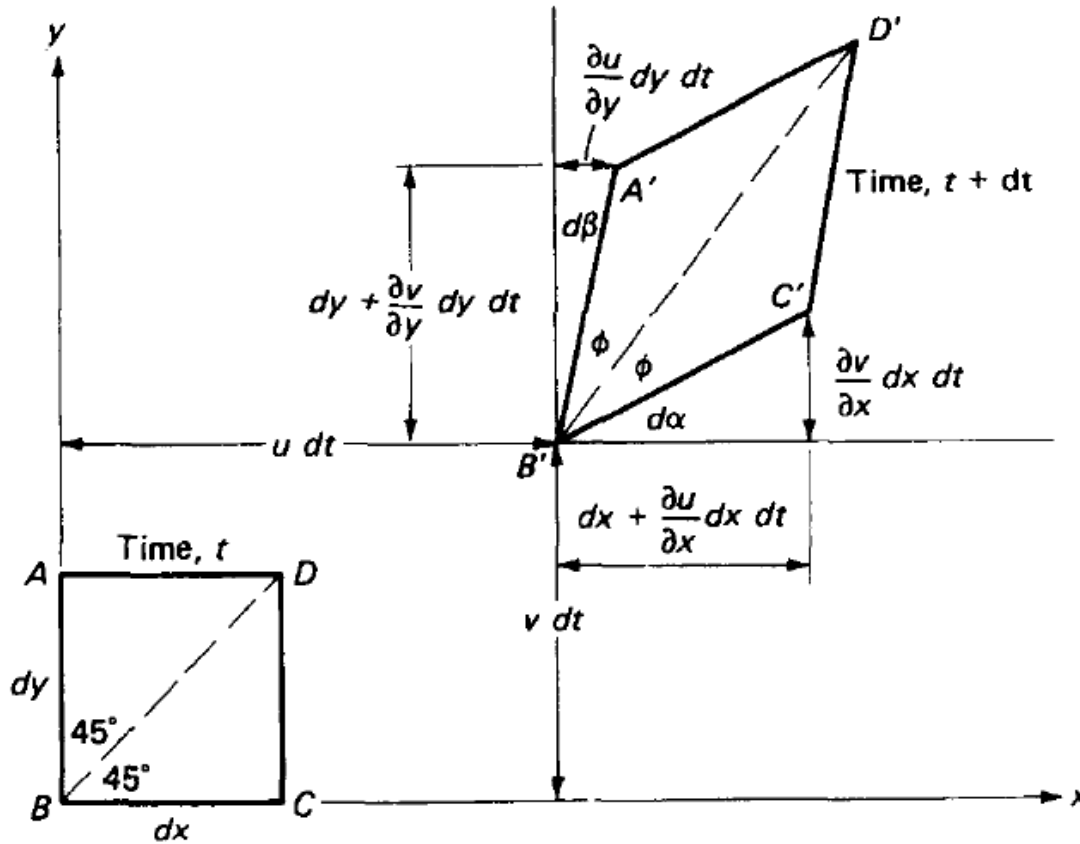
$$d\Omega_z = \Phi + d\alpha - 45^\circ \quad (23)$$

با توجه به شکل برای لحظه  $t+dt$  داریم:

$$d\alpha + d\beta + 2\Phi = 90^\circ \rightarrow \Phi = 45^\circ - \frac{1}{2}(d\alpha + d\beta) \quad (24)$$

با جایگذاری رابطه (24) در (23)، داریم:

$$d\Omega_z = \frac{1}{2}(d\alpha - d\beta) \quad (25)$$



## ادامه محاسبه نرخ چرخش

با استفاده از بسط تیلور تغییرات میدان سرعت و نیز هندسه المان سیال در لحظه  $t+dt$  داریم (شکل اسلاید قبلی):

$$d\alpha = \lim_{dt \rightarrow 0} \left[ \tan^{-1} \frac{(\partial v / \partial x) dx dt}{dx + (\partial u / \partial x) dx dt} \right] = \frac{\partial v}{\partial x} dt$$

$$d\beta = \lim_{dt \rightarrow 0} \left[ \tan^{-1} \frac{(\partial u / \partial y) dy dt}{dy + (\partial v / \partial y) dy dt} \right] = \frac{\partial u}{\partial y} dt$$
(۲۶)

بنابراین با قرار دادن رابطه (۲۶) در رابطه (۲۵)، نرخ چرخش جریان دو بعدی حول محور  $z$  بدست می آید:

$$\frac{d\Omega_z}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$
(۲۷)

نرخ چرخش قطر یک المان مکعبی در حالت سه بعدی، یک کمیت برداری است و این قطر حول هر سه محور  $x$  و  $y$  و  $z$  می تواند چرخش کند:

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} = \frac{d\Omega_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{d\Omega_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{d\Omega_z}{dt} \mathbf{k}$$
(۲۸)

## ادامه محاسبه نرخ چرخش

همانطور که در رابطه (۲۸)، بیان شد نرخ چرخش یک بردار است. چنانچه روند محاسبه قبلی برای صفحه XY را در خصوص صفحات XZ و YZ تکرار کنیم، می توانیم مولفه های چرخش قطر المان مکعبی شکل در حالت سه بعدی را به شرح زیر بدست آوریم:

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} = \frac{d\Omega_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{d\Omega_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{d\Omega_z}{dt}\mathbf{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{k} \quad (29)$$

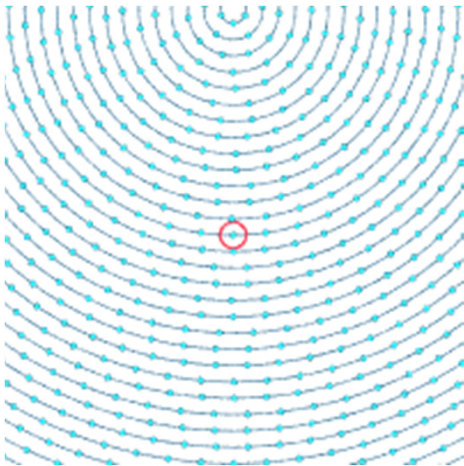
با مقایسه رابطه (۲۹) و رابطه (۹)، به سادگی نتیجه می شود که میان ورتیسیتی و نرخ چرخش رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} = \frac{1}{2}\mathbf{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{V} \quad (30)$$

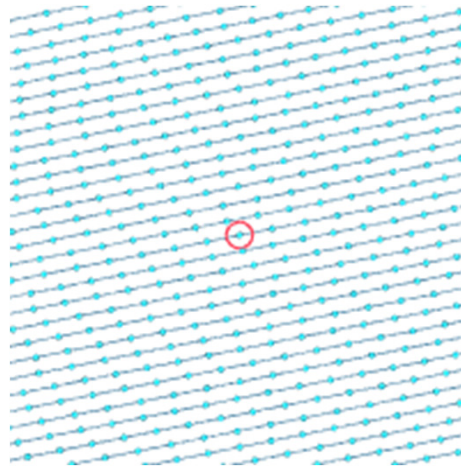
با توجه به رابطه ساده بین ورتیسیتی و نرخ چرخش (رابطه (۳۰)) و وجود یک فرمول ریاضی مناسب برای توصیف ورتیسیتی براساس کرل بردار سرعت (رابطه (۹))، معمولاً از ورتیسیتی به عنوان معیاری برای چرخشی بودن یا نبودن جریانه‌ها و نیز تعیین شدت چرخش جریانه‌های چرخشی استفاده می شود.

## جریانهای چرخشی

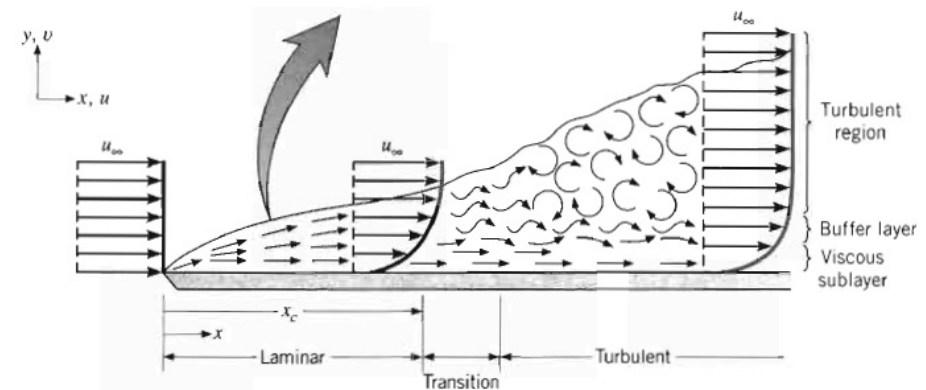
عمده جریانهای واقعی نظیر جریان داخل لایه مرزی، جریان داخل لوله و کانال، پرش هیدرولیکی، ناحیه ویک پشت اجسام، جریانهای گردابی محصول جدایش، جریان در توربوماشینها، جریانهای حاصل از جابجایی آزاد، کلیه جریانهای آشفته و ... چرخشی محسوب می شوند.



A rigid-body vortex



Simple shear flow



Boundary layer flow

## سیال نیوتنی

مطابق گزارش اسحاق نیوتن، نیروی مقاوم سیال در برابر حرکت یک جسم جامد در داخل آن با سرعت نسبی آنها متناسب است:

$$F \propto U \rightarrow F = cU$$

در جریان برشی ساده، داریم:

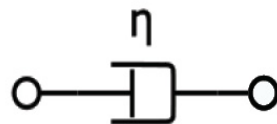
$$\tau_{xy} = \frac{F}{A} \quad \& \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{H} \rightarrow F = \tau_{xy} A \quad \& \quad U = H \dot{\gamma}_{xy}$$

بنابراین:

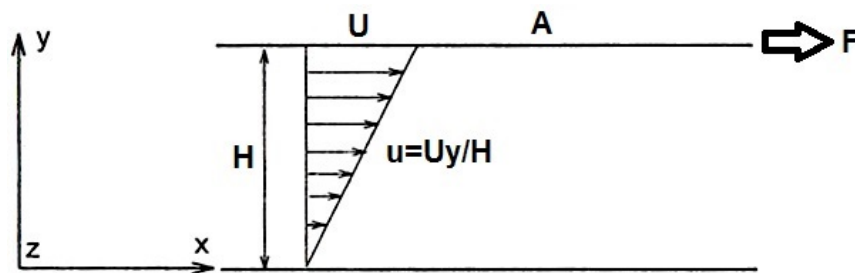
$$\tau_{xy} = \left( \frac{cH}{A} \right) \dot{\gamma}_{xy} \rightarrow \tau_{xy} \propto \dot{\gamma}_{xy} \rightarrow \tau_{xy} = \mu \dot{\gamma}_{xy} \quad (31)$$

معادله (31) به عنوان معادله ساختاری (معادله بین تنش و کرنش) سیالات نیوتنی شناخته می شود که در این رابطه،  $\mu$  ویسکوزیته سیال است.

لذا، سیال نیوتنی، سیالی است که در آن تنش برشی فقط رابطه ای خطی با نرخ برش دارد.

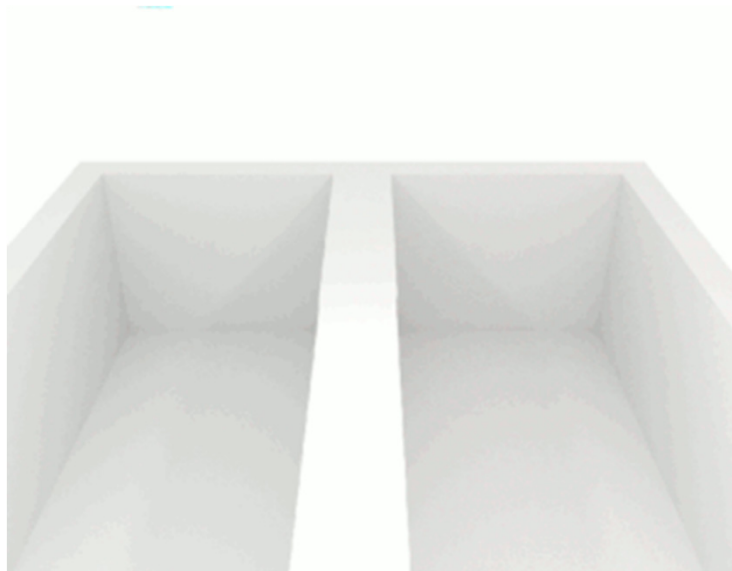
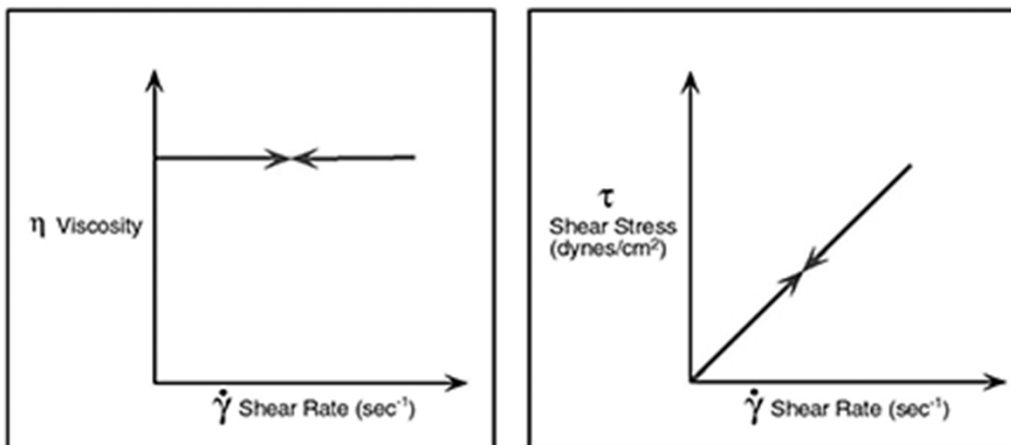


$$F = cU \quad \text{or} \quad \tau = \eta \dot{\gamma}$$



## نکاتی در خصوص سیالات نیوتنی و ویسکوزیته:

- در یک سیال نیوتنی، دیاگرام تنش برشی برحسب نرخ برش خطی است. شیب این نمودار معرف مقدار ویسکوزیته است.
- بایستی توجه داشت که ویسکوزیته یک خاصیت مستقل سیال (یک مدول مادی) است و می تواند با دما و فشار تغییر کند.
- در سیالات نیوتنی، ویسکوزیته وابسته به پارامترهای سینماتیک نظیر زمان و نرخ برش نیست.
- ویسکوزیته را می توان به عنوان پارامتر موثر در مقاومت ذاتی سیال در مقابل جریان تعبیر نمود. به عبارت دیگر هرچه ویسکوزیته سیال بالاتر باشد، ایجاد جریان برشی در آن دشوارتر و نیازمند انرژی بیشتر است. لذا ویسکوزیته همانند اصطکاک به عنوان یک عامل استهلاکی در تخریب انرژی جنبشی و تبدیل آن به انرژی گرمایی عمل می کند.
- ویسکوزیته مایعات به مراتب از ویسکوزیته گازها بیشتر است. همچنین مایعات نیز دارای طیف وسیعی از مقادیر ویسکوزیته هستند. برای مثال آب یکی از سیالات دارای ویسکوزیته بسیار پایین در میان مایعات است در حالیکه ویسکوزیته گلیسرین و عسل به ترتیب بیش از ۱۵۰۰ و ۲۰۰۰ برابر آب است.







رفتار نیوتنی ( $\tau = \mu \dot{\gamma}$ ) در سیالات زیر دیده می شود:

۱- گازها (که هوا و بخار آب از مهمترین آنها است)

۲- آب

۳- بسیاری از روغنهای نظیر روغنهای موتور، روغنهای هیدرولیکی و ...

۴- بسیاری از سوختهای مایع و میعانات گازی (نفت سفید، بنزین، گازوئیل، ...)

۵- نفت خام بویژه نفت خام سبک

۶- الکلها

۷- بسیاری از اسیدها و بازها (بویژه در نوع معدنی)

۸- بسیاری از ترکیبات مایع با وزن مولکولی کمتر از ۱۰۰۰ گرم بر مول



نکته: به دلیل فراوانی بالا و کاربردهای فوق العاده زیاد سیالات نیوتنی، مباحث مختلف مکانیک سیالات و انتقال حرارت همرفت متمرکز بر این دسته از سیالات است.



## ویسکوزیته سینماتیکی

نسبت ویسکوزیته سیال به چگالی آن، ویسکوزیته سینماتیکی نامیده می شود. دلیل این امر، عدم وجود یکای جرم در واحد ویسکوزیته سینماتیکی است.

$$\nu = \mu / \rho \quad (32)$$

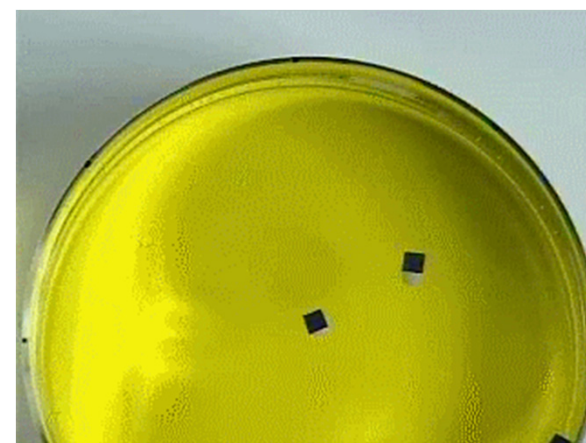
ویسکوزیته سینماتیکی نقش مهمی در میزان نفوذ مومنتوم جریان دارد. با افزایش نفوذ مومنتوم، اثرات تنش برشی سریعتر و تا عمق بیشتر در جریان گسترش پیدا می کند. این موضوع در فصل چهارم بطور مفصل مورد بحث قرار خواهد گرفت.



نفوذ مومنتوم در روغن 1000cSt



نفوذ مومنتوم در روغن 100cSt



نفوذ مومنتوم در روغن 10cSt

## واحد ویسکوزیته

سیستم انگلیسی و آمریکایی		سیستم CGS		سیستم SI	
$\nu$	$\mu$	$\nu$	$\mu$	$\nu$	$\mu$
ft <sup>2</sup> /s	Slug.ft <sup>-1</sup> .s <sup>-1</sup>	Stokes (St) cm <sup>2</sup> /s	Poise (P) یا g.cm <sup>-1</sup> .s <sup>-1</sup>	m <sup>2</sup> /s	Pa.s یا Kg.m <sup>-1</sup> .s <sup>-1</sup>

## برخی نکات:

- سیستم CGS (سانتی متر-گرم-ثانیه) مشابه سیستم SI است با این تفاوت که یکای جرم آن گرم و یکای طول آن سانتی متر است. استفاده از این سیستم برای اندازه گیری ویسکوزیته بیشتر در مهندسی شیمی رایج است. شایان ذکر است که برای آب مقادیر ویسکوزیته و ویسکوزیته سینماتیکی به ترتیب برابر 1cP و 1cSt است.
- در سیستم انگلیسی، Slug یکای جرم جسمی است که اگر نیروی یک پوند-فورس (lbf) به آن وارد شود، شتابی برابر با یک فوت بر مجذور ثانیه خواهد گرفت. 1Slug معادل 32.17405lbm و 14.5939kg است. برای تبدیل واحدهای ویسکوزیته در سیستمهای مختلف به بخش پیوستهای کتاب مراجعه کنید.

ویسکوزیته ۸ سیال مختلف در فشار ۱ اتمسفر و دمای ۲۰ درجه سانتی گراد

Fluid	$\mu$ , kg/(m · s) <sup>†</sup>	Ratio $\mu/\mu(\text{H}_2)$	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	$\nu$ m <sup>2</sup> /s <sup>†</sup>	Ratio $\nu/\nu(\text{Hg})$
Hydrogen	9.0 E-6	1.0	0.084	1.05 E-4	910
Air	1.8 E-5	2.1	1.20	1.50 E-5	130
Gasoline	2.9 E-4	33	680	4.22 E-7	3.7
Water	1.0 E-3	114	998	1.01 E-6	8.7
Ethyl alcohol	1.2 E-3	135	789	1.52 E-6	13
Mercury	1.5 E-3	170	13,550	1.16 E-7	1.0
SAE 30 oil	0.29	33,000	891	3.25 E-4	2,850
Glycerin	1.5	170,000	1,260	1.18 E-3	10,300



ویسکوزیته انواع عسل در دمای ۲۰ درجه سانتی گراد ۲۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰ آب است.



آزمایش تشکیل قطره یک نوع قیر –  
آزمایش از سال ۱۹۲۷ شروع شده و  
هنوز ادامه دارد. ویسکوزیته این قیر  
۲۳۰ میلیارد برابر آب است.

## تغییرات ویسکوزیته گازها با دما

ویسکوزیته گازها با دما و فشار متغیر است. نکته جالب توجه آنکه در گاز ایده آل نیز با وجود صرفنظر از جاذبه و دافعه الکتروستاتیک بین ذرات، ویسکوزیته مشاهده می شود! در گاز ایده آل، ویسکوزیته ناشی از تبادل مومنتوم (اندازه حرکت) بین ذرات است. با افزایش دمای یک گاز، مقدار انرژی جنبشی ذرات و در نتیجه تبادل مومنتوم حاصل از برخورد آنها شدیدتر می شود. توجه داشته باشید، که انتقال مومنتوم بین ذرات نیز کاملاً در جهات تصادفی اتفاق می افتد. در نتیجه در دماهای بالا، ایجاد جریان برشی و حرکت ذرات در یک جهت دلخواه (با اعمال نیروی خارجی) کاری دشوار است. به این ترتیب با افزایش دمای یک گاز ایده آل نیز ویسکوزیته آن افزایش می یابد. با استفاده از تئوری بولتزمن برای گاز ایده آل تک اتمی می توان به رابطه زیر برای ویسکوزیته آنها رسید:

$$\mu = \frac{2}{3} \rho \lambda c \quad \text{or} \quad \mu = \frac{2}{3\pi} \frac{\sqrt{\pi m k T}}{\pi d^2} \rightarrow \mu \propto \sqrt{T} \quad (33)$$

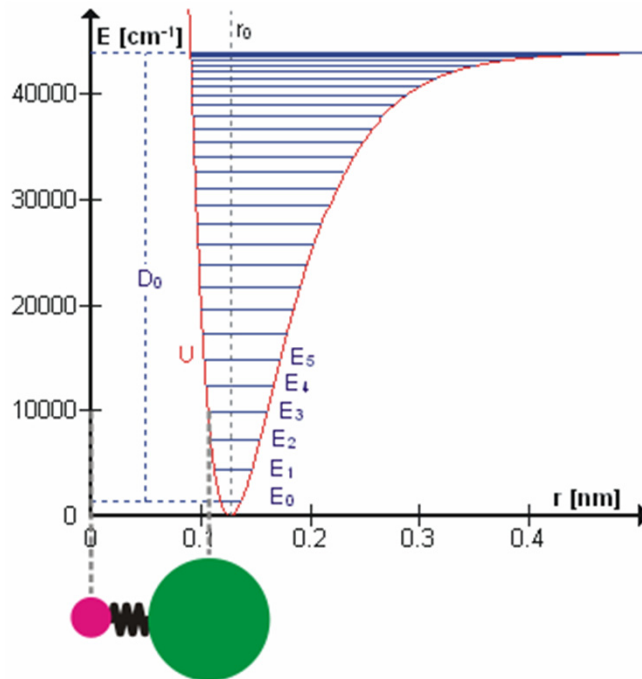
در رابطه فوق،  $\rho$  چگالی،  $\lambda$  مسیر آزاد متوسط،  $m$  جرم یک ذره گاز،  $k$  ثابت بولتزمن،  $T$  دما و  $d$  قطر ذرات است.

در گازهای واقعی، باید اثر انرژی پتانسیل مربوط به نیروهای جاذبه و دافعه بین ذرات را نیز در محاسبه ویسکوزیته دخالت داد. شایان ذکر است که ذرات در فاصله‌های دور نیروی جاذبه و در فاصله‌های نزدیک نیروی دافعه به هم اعمال می کنند. نیروی جاذبه معمولاً نیروی واندروالسی و نیروی دافعه نیروی رانش ناشی از هم‌پوشانی ابر الکترونی دو ذره است (نیروی پاولی که از اصل طرد پاولی می آید).

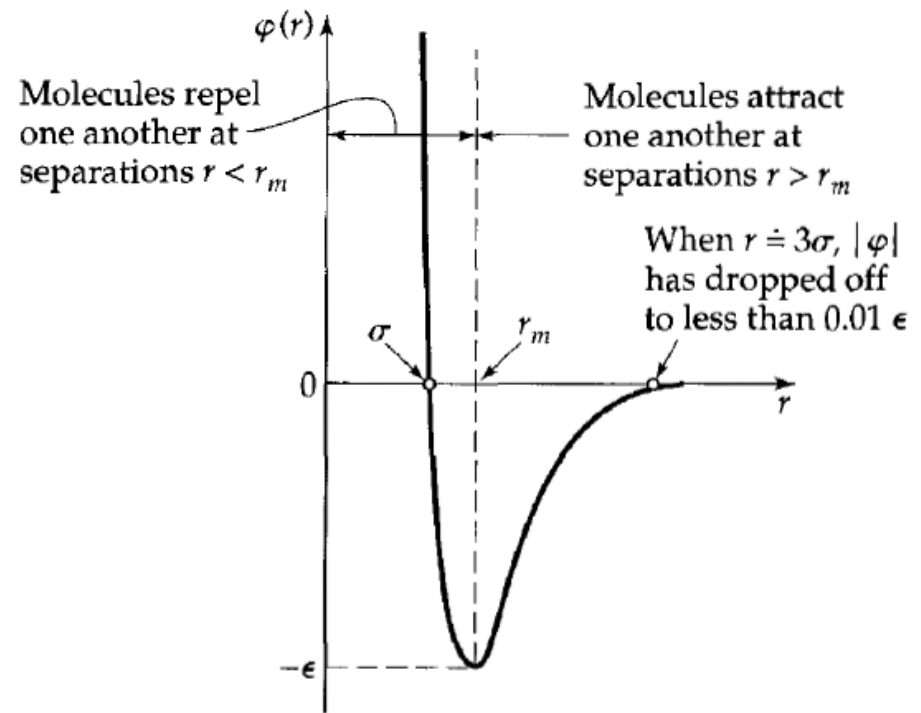
معمولا از فرمول لنارد-جونز برای توصیف این انرژی پتانسیل استفاده می شود:

$$\varphi(r) = 4\epsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] \quad (34)$$

در این رابطه،  $\epsilon$  قدرمطلق انرژی در حالت تعادل،  $\sigma$  فاصله ای که در آن پتانسیل انرژی صفر می شود و  $r_m$  فاصله تعادلی است.



نوسانات مولکول  $\text{HCl}$  در اثر جاذبه و دافعه بین مولکولی



تابع انرژی پتانسیل لنارد-جونز

برای گازهای واقعی با در نظر گرفتن اثر جاذبه و دافعه بین مولکولی، رابطه ای به شکل زیر ارائه شده است:

$$\mu = \frac{2.6693 \times 10^{-5} \sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega_\mu} \quad (35)$$

در رابطه فوق،  $M$  وزن مولکولی گاز و  $\Omega_\mu$  تابع نسبتاً ضعیفی از دما است:

$$\Omega_\mu \approx 1.147 (T / T_\varepsilon)^{-0.145} + (T / T_\varepsilon + 0.5)^{-2.0} \quad (36)$$

در رابطه فوق،  $T_\varepsilon$  یک پارامتر مولکولی دما است. با توجه به تابعیت نسبتاً ضعیف  $\Omega_\mu$  نسبت به دما می توان نتیجه گرفت که در مقدار ویسکوزیته گاز واقعی نیز نقش تبادل مومنتوم بین ذرات بسیار پررنگ است.

Viscosity (g/cm · s)					
$T$ (K)	$\kappa T / \varepsilon$	$\Omega_\mu$	$\sqrt{T}$	Predicted	Observed <sup>11</sup>
200	1.053	1.548	14.14	$1.013 \times 10^{-4}$	$1.015 \times 10^{-4}$
300	1.58	1.286	17.32	$1.494 \times 10^{-4}$	$1.495 \times 10^{-4}$
800	4.21	0.9595	28.28	$3.269 \times 10^{-4}$	...

ویسکوزیته گاز CO<sub>2</sub> در دماهای مختلف

(مقادیر ثابتهای این گاز:  $\varepsilon / k = 190 K$ ،

$\sigma = 3.996 \text{ \AA}$  و  $M = 44.01 \text{ g}$ )



## تغییرات ویسکوزیته مایعات با دما

در مایعات، با افزایش دما ویسکوزیته کاهش می یابد. در بعضی مایعات مانند روغن‌ها، افت ویسکوزیته با افزایش دما بسیار قابل توجه است. برخلاف گازها، فاصله مولکولی در مایعات بسیار اندک بوده و میزان جاذبه الکتروستاتیک بین ذرات بالا است که این جاذبه در ایجاد ویسکوزیته مایعات نقش مهمی دارد. با بالا بردن دمای یک مایع، سطح انرژی جنبشی نوسانی مولکول‌ها افزایش یافته و لذا مولکول‌ها توانایی بیشتری برای غلبه بر نیروهای جاذبه بین مولکولی و فرار از محل قرار گیری خود خواهند داشت. به این ترتیب، ازدیاد دما منجر به کاهش ویسکوزیته مایعات می شود. برای ویسکوزیته مایعات رابطه ای براساس تئوری Eyring ارائه شده است:

$$\mu = \frac{\tilde{N}h}{\tilde{V}} \exp\left(3.8 \frac{T_b}{T}\right) \quad (37)$$

در این رابطه،  $\tilde{N}$  عدد آووگادرو،  $h$  ثابت پلانک،  $\tilde{V}$  حجم یک مول،  $T_b$  دمای تبخیر و  $T$  دمای سیال است. رابطه فوق تحت شرایط زیر برای سیالات نیوتنی (رابطه خطی بین تنش و نرخ برش) استخراج شده است:

$$\frac{\tau_{xy} \tilde{V}}{RT} \ll 1 \rightarrow \tilde{V} \text{ is small}$$

این نشان می دهد که رفتار نیوتنی در سیالات دارای ذرات کوچک وجود دارد که این مشاهدات تجربی هم سازگار است **چون رفتار غیرنیوتنی عمدتاً در مواد درشت ذره (پلیمرها) مشاهده می شود.**

هرچند رابطه (۳۷) معمولا دارای خطای قابل توجهی تا حدود ۳۰٪ است، اما فرم آرنیوسی این رابطه با مشاهدات تجربی کاملاً سازگار است، به همین دلیل این رابطه الهام بخش ایجاد روابط تجربی بصورت زیر برای مایعات بوده است:

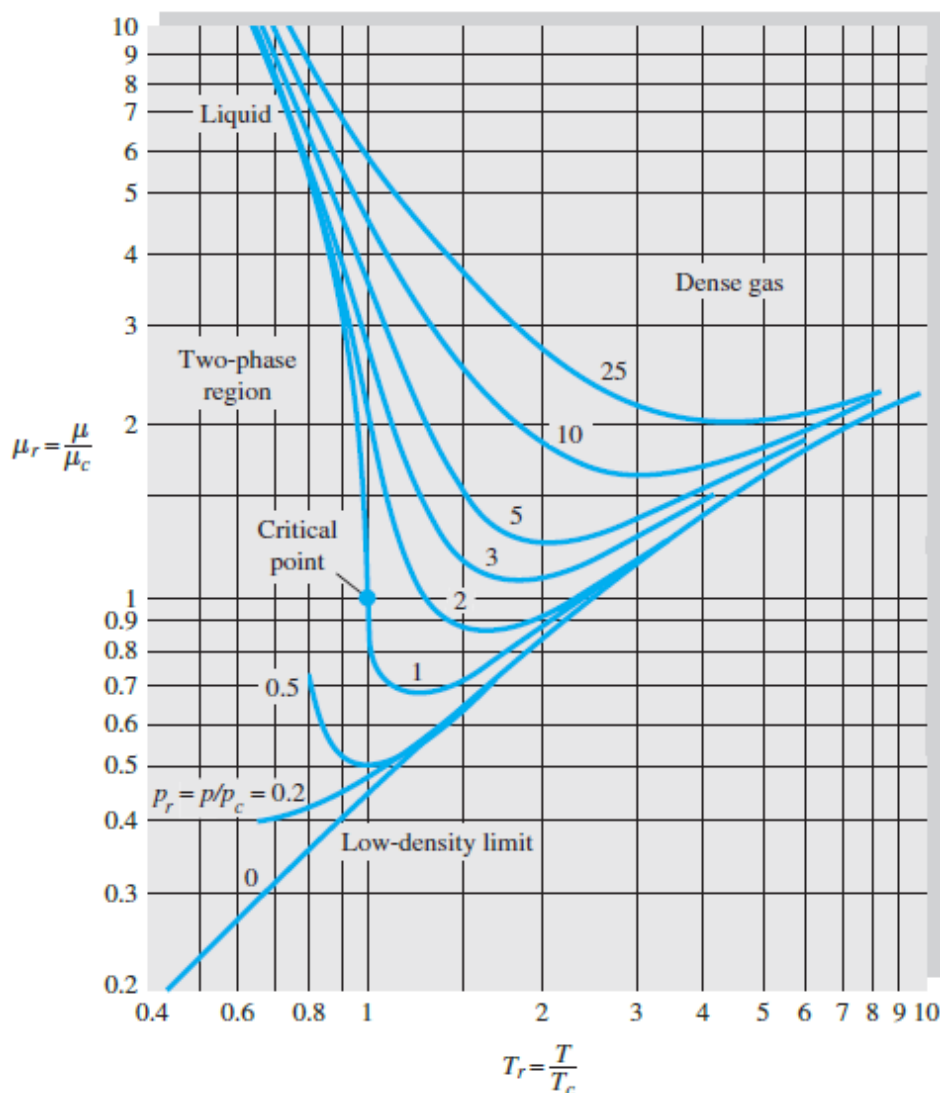
$$\mu = A \exp\left(\frac{B}{T}\right) \quad (38)$$

در رابطه فوق، A و B ثابتهای تجربی هستند که در جدول زیر نمونه هایی از مقادیر آن برای چند مایع گزارش شده است. شایان ذکر است که روابط تجربی مشابه دیگری نیز در مراجع گزارش شده که بعضاً دارای دقت بهتری نسبت به رابطه (۳۸) هستند اما شامل جملات و ثابتهای تجربی بیشتری می باشند.

Fitting parameters for the correlation $\mu = Ae^{B/T}$ [13]				
Liquid	Chemical formula	A (mPa·s)	B (K)	Temp. range (K)
Bromine	Br <sub>2</sub>	0.0445	907.6	269–302
Acetone	C <sub>3</sub> H <sub>6</sub> O	0.0177	845.6	193–333
Bromoform	CHBr <sub>3</sub>	0.0332	1195	278–363
Pentane	C <sub>5</sub> H <sub>12</sub>	0.0191	722.2	143–313
Bromobenzene	C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> Br	0.02088	1170	273–423



## تغییرات ویسکوزیته با فشار



افزایش فشار سبب ازدیاد اندکی در مقدار ویسکوزیته سیالات می شود. برای مثال با افزایش فشار هوا از ۱ تا ۵۰ اتمسفر، ویسکوزیته هوا فقط ۱۰٪ افزایش می یابد. لذا اثر فشار در مقابل اثر دما بر ویسکوزیته قابل توجه نیست. در مراجع مختلف، گرافهای مختلفی برای تعیین وابستگی ویسکوزیته سیالات مختلف به دما و فشار آمده که دیاگرام روبرو برای دسته بزرگی از سیالات با خطای حدود ۲۰٪ قابل استفاده است. برای نمونه، خطای این دیاگرام برای هوا در فشار ۱ اتمسفر حدود ۸٪ است. شایان ذکر است که در اینجا، دما، فشار و ویسکوزیته بر حسب نقطه بحرانی نرمالیز شده است. همچنین، تغییرات ویسکوزیته در نزدیکی نقطه بحرانی بسیار شدید است.

